§5 Lebesgue 积分

§5.1 非负可测函数的积分

Riemann 积分：分割近似求和取极限

积分和极限换序：$f_n(x) \rightrightarrows f(x)$

一、非负简单函数

Def. 设 $f(x) = \chi_A(x)$. $\int_E f(x)\,dx = 1\cdot m(A\cap E)$ 称为 $f(x)$ 在 E 上的积分

例1 $E=[1,2]$，$A=[\frac{3}{2},4]$，$f(x)=\begin{cases} 1, & \frac{3}{2}\leq x\leq 2 \\ 0, & 1\leq x<\frac{3}{2} \end{cases}$

$$\int_E f(x)\,dx = \int_{\frac{3}{2}}^{2} 1\,dx = \frac{1}{2}$$

$\chi_{\mathbb{Q}}$ (Dirichlet 函数) 不是 Riemann 可积，但：

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_{\mathbb{Q}}(x)\,dx = 1\cdot m(\mathbb{Q}) = 0.$$

Def. 设 $f(x)=\sum_{k=1}^{N} c_k\chi_{A_k}$，$A_k$ 互不交，$\int_E f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{N} c_k\cdot m(A_k\cap E)$

$= \sum_{k=1}^{N} c_k\int_E \chi_{A_k}(x)\,dx$，这里 $c_k>0$ 均成立.

Rem. $f=\sum_{k=1}^{N} c_k\chi_{A_k} \Rightarrow \int_E f\,dx = \sum_{k=1}^{N} c_k\int_E f_{A_k}\,dx.$

几何意义：$G(E,f)=\{(x,z): x\in E, 0\leq z<f(x)\}$ 称为 $f(x)$ 的下方图形

这里 $f=\chi_A$ 时 $m(\{(x,f(x)): x\in E\cap A\}) = m(\{(x,1): x\in E\cap A\})$

$= m((E\cap A)\times\{1\}) = m(E\cap A)$

Prop. 非负简单函数的性质：

(1) f 的积分非负 ($\int_E f(x)\,dx \geq 0$)

(2) $\varphi_1(x)\leq\varphi_2(x) \Rightarrow \int_E \varphi_1(x)\,dx \leq \int_E \varphi_2(x)\,dx$ (单调性)

(3) $\int_E (af+bg)\,dx = a\int_E f\,dx + b\int_E g\,dx$. (线性性)

二、非负可测函数

(1) 将值域进行分割：$c=\varphi_0<\varphi_1<\cdots<\varphi_n=d$, $f: E\to[c,d]$

(R) $\lim\limits_{|\lambda|\to 0}\sum\limits_{k=1}^{N} f(\xi_k)\Delta x_k$

(L) $\lim\limits_{|\lambda|\to 0}\sum\limits_{k=1}^{N} y_k\cdot m(E_k)$, $\varphi_k\leq y_k\leq\varphi_{k+1}$, $|\lambda|=\max\{\Delta\varphi_k: k=0,\cdots,n-1\}$.

(2) $f\geq 0$ 可测，$\exists$ 一列简单函数 $\varphi_k(x)\uparrow$, $\varphi_k(x)\to f(x)$, $\forall x\in E$.

定义 $\int_E f(x)\,dx=\lim\limits_{k\to+\infty}\int_E\varphi_k(x)\,dx$.

问题：同时 $\exists\{\varphi_k\},\{\psi_k\}$，是否有 $\lim\limits_{k\to+\infty}\int_E\varphi_k(x)\,dx=\lim\limits_{k\to+\infty}\int_E\psi_k(x)\,dx$.

(3) $f\geq 0$ 可测，定义 $\int_E f(x)\,dx=\sup\{\int_E\varphi(x)\,dx: 0\leq\varphi(x)\leq f(x), \varphi$ 为一列简单函数$\}$.

几何意义：① φ 为简单函数，$\int_E\varphi(x)\,dx=m(G(E,\varphi))$

$m(G(E,\varphi))\leq m(G(E,f))$

即 $\int_E f(x)\,dx=\sup\int_E\varphi(x)\,dx=\sup(G(E,\varphi))\leq m(G(E,f))$.

② 下证 $m(G(E,f))\leq\int_E f(x)\,dx$:

$\forall (x,z)\in G(E,f)$, $x\in E$ 且 $z\leq f(x)$

于是 $\exists k_0$ s.t. $0\leq z<\varphi_{k_0}(x)<f(x)$, φ_{k_0} 简单非负

则 $(x,z)\in G(E,\varphi_{k_0})\subseteq\bigcup\limits_{k=1}^{+\infty}G(E,\varphi_k)\subseteq G(E,f)$

由 (x,z) 任意性，$G(E,f)\subseteq\bigcup\limits_{k=1}^{+\infty}G(E,\varphi_k)$

于是 $m(G(E,f))=m\bigcup\limits_{k=1}^{+\infty}G(E,\varphi_k)=\lim\limits_{k\to+\infty}m(G(E,\varphi_k))$

由 $\varphi_k\uparrow$ 知上述始终成立

于是 $m(G(E,f))\leq\int_E f(x)\,dx$.

Prop. 非负可测函数的性质

(1) 非负性：$\int_E f(x)\,dx\geq 0$

(2) 单调性：$f(x)\leq g(x)\Rightarrow\int_E f(x)\,dx\leq\int_E g(x)\,dx$

(3) 线性性：$\int_E\lambda f(x)\,dx=\sup\{\int_E\varphi(x)\,dx:\varphi(x)<\lambda f(x)\}=\lambda\sup\{\int_E\psi(x)\,dx:\psi<f\}=\lambda\int_E f(x)\,dx$.

$\int_E (f+g)\,dx = \int_E f\,dx + \int_E g\,dx$:

$\int_E f(x)\,dx = \lim \int_E \varphi_k(x)\,dx$, $\varphi_k(x)\uparrow$, $\varphi_k(x) \to f(x)$

$\int_E g(x)\,dx = \lim \int_E \psi_k(x)\,dx$, $\psi_k(x)\uparrow$, $\psi_k(x) \to g(x)$

于是 $f+g$ 由 $\varphi_k+\psi_k\uparrow$ 逼近:

$\int_E (f+g)\,dx = \lim\left(\int_E \varphi_k\,dx + \int_E \psi_k\,dx\right) = \int_E f\,dx + \int_E g\,dx.$

三、一般可测函数

$f = f^+ - f^-$, 定义 $\int_E f(x)\,dx = \int_E f^+\,dx - \int_E f^-\,dx.$

① $\int_E f^+\,dx$、$\int_E f^-\,dx$ 至多有一个为 ∞, 积分存在

② $\int_E f^+\,dx$、$\int_E f^-\,dx$ 均有限, 积分可积.

例2 f 在 E 上非负可测, $\mathbb{Q}^+ = \{r_1, r_2, \cdots\}$, $E_n = E[f > r_n]$,

$B_n = [0, r_n]$, $G_n = E_n \times B_n$, 则 $G[E,f] = \bigcup_{n=1}^{+\infty} G_n$

Pf. $\bigcup_{n=1}^{+\infty} G_n \subseteq G(E,f)$: $\forall (x,z) \in G_n$, $x \in E_n$, $z \in B_n$

则 $f(x) > r_n$, $0 \le z \le r_n$. 于是 $0 \le z < f(x)$

$(x,z) \in G(E,f)$.

$G(E,f) \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} G_n$: $\forall (x,z) \in G(E,f)$, $x \in E$, $0 \le z < f(x)$.

$\exists r_k \in \mathbb{Q}^+$ s.t. $z < r_k < f(x)$, 于是 $(x,z) \in E_k \times B_k = G_k$

$(x,z) \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} G_n$.

Cor1. $m(E) = 0 \Rightarrow \int_E f(x)\,dx = 0$.

Pf. 由例2, $m(G_n) = m(E_n) \times m(B_n) = 0$.

由次可数可加性, $m\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} G_n\right) \le \sum_{n=1}^{+\infty} m(G_n) = 0$.

Cor2. $f \in \mathcal{M}(E)$, $f \geq 0$, $\int_E f(x)\,dx = 0$, 则 $f = 0$ a.e. on E.

Pf. 假设 $m(E[f \ne 0]) > 0$, 则 $m(E[f > 0]) > 0$, 于是 $m\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E[f > \frac{1}{n}]\right) > 0$

$\exists n_0 > 0$ s.t. $m(E[f > \frac{1}{n_0}]) > r > 0$.
$r > 0$

于是 $\int_E f(x)\,dx \geq \int_E \frac{1}{n_0} \chi_{E[f > \frac{1}{n_0}]} > \frac{1}{n_0} \cdot r > 0$. 矛

Cor 3. $m(E)>0$, $f(x)\in\mathcal{M}(E)$, $f>0$ a.e. on E，则 $\int_E f(x)\,dx>0$.

例3 $f,g\in\mathcal{M}(E)$ 且非负，$0\le f(x)\le g(x)$，$g(x)\in L(E)$，则 $f(x)\in L(E)$.

Cor. $m(E)<+\infty$，$f\in\mathcal{M}(E)$，$f\geq 0$ 且有界，则 $f\in L(E)$.

Thm. (Levi)
$\{f_n\}\subset\mathcal{M}(E)$，$f_n(x)\geq 0$ a.e. on E，$f_n\uparrow f$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_E f_n(x)\,dx=$

$\int_E \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx=\int_E f(x)\,dx$.

Pf. $G(E,f_n)\subseteq G(E,f)$：$\forall (x,z)\in G(E,f_n)$，$z<f_n(x)\le f(x)$.

$G(E,f)\subseteq G(E,f_n)$：$\exists n_0$ s.t. $z<f_{n_0}(x)<f(x)$.

又有 $m(G(E,f_n))\uparrow$，$m\left(\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} G(E,f_n)\right)=m(G(E,f))$.

$\int_E f_n(x)\,dx=m(G(E,f_n))$，$\int_E f(x)\,dx=m(G(E,f))$.

由 $f_n\uparrow f$ 有，$G(E,f_n)\subseteq G(E,f_{n+1})\subseteq G(E,f)$.

于是 $\lim\limits_{n\to+\infty} m(G(E,f_n))=m\left(\lim\limits_{n\to+\infty} G(E,f_n)\right)=m\left(\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} G(E,f_n)\right)$

$=m(G(E,f))$.

(Lebesgue 逐项积分)
Cor. $\{f_n\}\subset\mathcal{M}(E)$，$f_n(x)\geq 0$，$\forall n$，a.e. on E，则 $\int_E\left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\right)dx=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\int_E f_n(x)\,dx$.

Pf. 记 $P_N(x)=\sum\limits_{n=1}^{N} f_n(x)$，则 $0\le P_N(x)\le P_{N+1}(x)$，a.e. on E.

于是 $P_N(x)\uparrow f(x)$，由 Levi Thm. $\int_E\left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\right)dx=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\int_E f_n(x)\,dx$.

Cor. (Fatou)

$\{f_n(x)\}\subset\mathcal{M}(E)$，$f_n\geq 0$，$\int_E\left(\varliminf\limits_{n\to+\infty} f_n(x)\right)dx\le\varliminf\limits_{n\to+\infty}\int_E f_n(x)\,dx$.

Pf. $\varliminf\limits_{n\to+\infty} f_n(x)=\lim\limits_{N\to+\infty}\inf\limits_{n\geq N}\{f_n(x)\}$，记 $g_N(x)=\inf\limits_{n\geq N}\{f_n(x)\}$.

$\inf\limits_{n\geq N}\int_E f_n(x)\,dx\geq\int_E g_N(x)\,dx$，于是 $\lim\limits_{N\to+\infty}\inf\limits_{n\geq N}\int_E f_n(x)\,dx\geq\int_E\left(\varliminf\limits_{n\to+\infty} f_n(x)\right)dx$

Rem. (1) $f_n(x)=\frac{1}{n}\chi_{(0,n)}$，$\int_E f_n(x)\,dx=1$，$f_n(x)\to 0$，$\forall x\in\mathbb{R}$

(2) 若换为上极限：$\varlimsup\limits_{n\to+\infty} f_n(x)=\lim\limits_{N\to+\infty}\sup\limits_{n\geq N}\{f_n(x)\}$.

若 $0\le f_n(x)\le F(x)$，$\forall n\geq N_0$，记 $g_N(x)=F(x)-\sup\{f_n(x)\}$.

于是 $\int_E \lim\limits_{N\to+\infty} g_N(x)\,dx = \lim\limits_{N\to+\infty}\int_E g_N(x)\,dx$

$$= \lim_{N\to+\infty}\int_E F(x)\,dx - \lim_{N\to+\infty}\int_E \sup\{f_n(x)\}\,dx$$

$$\leq \lim_{N\to+\infty}\int_E F(x)\,dx - \overline{\lim_{n\to+\infty}}\int_E f_n(x)\,dx$$

若 $\int_E F(x)\,dx < +\infty$，则 $\int_E \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} f_n(x)\,dx \geq \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\int_E f_n(x)\,dx$.

事实上有： $\int_E \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\,dx \leq \lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\,dx \leq \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\int_E f_n(x)\,dx \leq \int_E \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} f_n(x)\,dx$

所：在 $F(x)\in L(E)$ 的条件下，$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$

例4 f 非负可测，$E=\bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i$ 互不交可测，则 $\underbrace{\int_E f(x)\,dx}_{\text{均可为}+\infty} = \sum\limits_{i=1}^{n}\int_{E_i} f(x)\,dx$

Pf. $\sum\limits_{i=1}^{n}\int_{E_i} f(x)\,dx = \int_E \sum\limits_{i=1}^{n} f(x)\cdot\chi_{E_i}(x)\,dx = \int_E f(x)\cdot\chi_E(x)\,dx$

$$= \int_E f(x)\,dx.$$